

正標数代数曲線の基本群の特殊化射の非同型性

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻

伏見宗紘 (Tokihiko FUSHIMI) *

概要

講演者はある正標数完備離散付値体上のある種の多様体上の相対曲線に対して、多様体の「単位開円盤」上で幾何的 étale (tame) 基本群が constant でないことを示した。また、同様の手法を用いて有限体上の (smooth で) 双曲的な曲線の粗モジュライ空間上の任意の閉点に対して、その閉点を含む飽和した鎖であって、各点に対応する幾何的 étale (tame) 基本群の間の specialization homomorphism が全て非同型になるようなものの存在を示した。第一の結果については、Saïdi, Mohamed 氏と玉川安騎男氏の研究による技術をその「non-smooth」版に発展させることによってその応用として帰結し、第二の結果では従来の技術をその「絶対版」とも呼べる形に発展させ、それを応用することによって証明した。本講演では、正標数代数閉体上の遠アーベル幾何学についての概況を説明し、上記に記した講演者の結果を紹介する。

1 導入

k を代数閉体とし、 X を k 上の proper, smooth な曲線とする。いま、 X の étale 基本群 $\pi_1(X)$ が抽象的な副有限群としてどれほど元の曲線 (の同型類) の情報を持っているかという問題に関心がある。この問題には色々な“強さ”の定式化が知られているがその 1 つとして次の問題がある。

問題 1.1. ((absolute) weak Isom 版)

X, Y を k 上の proper, smooth な曲線とする。このとき

$$X \simeq Y \text{ (スキームとして)} \iff \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y) \text{ (副有限群として)} \quad (1)$$

が成立するか？

(π_1 の関手性から ($\implies$) については常に成立することに注意する.)

k の標数が 0 の場合は、Riemann の存在定理よりその étale 基本群 $\pi_1(X)$ は種数 g の Riemann 面の位相的基本群の副有限完備化 Γ_g と同型であることが知られている。この場合は基本群は曲線の種数の情報しか持っておらず、この問題の成立とは程遠い状況にある。

k が標数 $p > 0$ の場合は、一般に副有限群の全射 $\Gamma_g \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ があり、これは maximal pro-prime-to- p quotient の間の同型 $\Gamma_g^{p'} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X)^{p'}$ を誘導する。以下では少し用語の準備をし、標数 $p > 0$ では標数が 0 の場合と異なり étale 基本群 (や tame 基本群) がより多くの情報を持っていることを確認する。

ここでは (g, n) 型の曲線とは、 k 上の proper, smooth な曲線 X でその種数が g のものと、 X の n 点からなる真部分閉集合 D の組 (X, D) のこと (曲線 $X - D$ そのものを指すこともある) で、さらに

* E-mail: fushimi@kurims.kyoto-u.ac.jp

$2 - 2g - n < 0$ を満たすときに双曲的という．ここからはより広く標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上の (g, n) 型の双曲的な曲線 (X, D) に対して、その étale 基本群 $\pi_1(X - D)$ が元の曲線 (X, D) についてどれほどの情報を持っているかということについて考えるが、proper でない曲線の étale 基本群は扱いが難しく、その代わりに tame 基本群 $\pi_1^t(X, D)$ を用いて議論を進めることがある．しかし、2 つの (g, n) 型曲線 $(X, D), (Y, E)$ に対して [T1]Corollary 1.5 より

$$\pi_1(X - D) \simeq \pi_1(Y - E) \implies \pi_1^t(X, D) \simeq \pi_1^t(Y, E) \quad (2)$$

という関係がある．よって tame 基本群がどれほど元の曲線の情報を持っているかという問題が自然と生じる．その 1 つの結果に次の定理がある．

定理 1.2. (c.f. [T2] Theorem 4.1)

$i = 1, 2$ とする． k_i を標数が $p_i > 0$ の代数閉体とし、 (X_i, D_i) を (g_i, n_i) 型の曲線とする．このとき、 $g_i = 0$ かつ $n_i \leq 1$ ($i = 1, 2$) の場合を除けば

$$\pi_1^t(X_1, D_1) \simeq \pi_1^t(X_2, D_2) \implies (p_1, g_1, n_1) = (p_2, g_2, n_2) \quad (3)$$

が成立する．(簡明に述べるため元の主張よりは精度を落としたことに注意する.)

さらに $k_0 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathbb{F}_p}$ 上の曲線については次の結果がある．

定理 1.3. (c.f. [T3] Theorem 8.6)

副有限群 Π に対して tame 基本群 $\pi_1^t(X, D)$ が副有限群として Π と同型になる (g, n) 型の双曲的な曲線 (X, D) の同型類は高々有限個である．

これは k_0 上で問題 1.1 が有限個の差を除けば成り立つということを意味する重要な結果である．

以下では (p, g, n) の組の情報が与えられている双曲的な曲線に絞って話をする．これを曲線のモジュライ空間の言葉を用いて言い換えたい． $\mathbb{F}_p$ 上の (g, n) 型の双曲的な曲線の coarse モジュライ空間を $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ とすると、 $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ の各閉点はある k_0 上定義される (g, n) 型の曲線 (の同型類) に対応しており、またこの逆も成り立つ．この対応を $s \leftrightarrow (X_{\bar{s}}, D_{\bar{s}})$ と表すと、定理 1.3 は $\Pi \simeq \pi_1^t(X_{\bar{s}}, D_{\bar{s}})$ が成り立つような $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ の閉点 s は高々有限個である、と言い換えられる．

また、定理 1.3 を示すのには $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ 上での Grothendieck による specialization 理論を用いた次の定理 1.4 が本質的に用いられた．ここで、specialization homomorphism とは $\eta \rightsquigarrow s \in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ ($\stackrel{\text{def}}{=} s \in \overline{\{\eta\}}$) のときに基本群の間に内部自己同型の差を除いて標準的に誘導される全射 $\text{Sp}_{\eta,s}^t : \pi_1^t(X_{\bar{\eta}}, D_{\bar{\eta}}) \twoheadrightarrow \pi_1^t(X_{\bar{s}}, D_{\bar{s}})$ のことである．

定理 1.4. $s \in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ を閉点、 $\eta \in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ を s とは異なる点で $\eta \rightsquigarrow s \in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ を満たしているものとする．このとき $\text{Sp}_{\eta,s}^t : \pi_1^t(X_{\bar{\eta}}, D_{\bar{\eta}}) \twoheadrightarrow \pi_1^t(X_{\bar{s}}, D_{\bar{s}})$ は同型でない．

k_0 あるいは $\mathbb{F}_p$ 上に限った結果を紹介したが、一般の標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上で定理 1.3 のような、問題 1.1 を弱めたバージョンについて何か言えないだろうか? という問いが生じる．これはモジュライ空間の言葉を用いて直感的に言うと、 k_0 上の曲線が $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ の閉点のみを見ているのに対して、 k が“大きければ” $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ の他の点を見ていることになる．その問題の 1 つの定式化の方向性として次の系統の問題が考えられる．

問題 1.5. どのような部分集合 $S \subset M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ に対して、 π_1^t は S 上 constant か? (あるいは non-constant か?)

どのような部分集合 $S' \subset M_{g,[n],k}$ に対して, π_1^t は S' 上 constant か? (あるいは non-constant か?)

ここで「 π_1^t が S 上 constant である」とは $\{\pi_1^t(X_{\bar{s}}, D_{\bar{s}})\}_{s \in S}$ の副有限群としての同型類が 1 つであることを指す. S' についても同様に定められる. 定理 1.4 はそこでの記法を用いたとき, π_1^t が $S = \{\eta, s\} \subset M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ 上 non-constant である, と言い換えられる. このような問いを考えるにあたって注意すべきことの 1 つに, k 上定義される曲線がたとえ k スキームとして同型でなくても $(\mathbb{F}_p)$ スキームとして同型なら基本群は同型である, ということがある. 特に一般の標数 $p > 0$ の代数閉体 k に対して $\eta' \rightsquigarrow s' \in M_{g,[n],k}$ の関係にある異なる 2 点で, s' が閉点であったとしても π_1^t は $S' = \{\eta', s'\}$ 上 constant になる例がある.

この系統の問題の 1 つの定式化であり, 示されたことに次の定理がある.

定理 1.6. ([ST] Theorem 3.6)

任意の正の次元を持つ部分多様体 $S \subset M_{g,k}$ に対して π_1 は S 上 constant にならない.

また双曲的 (g, n) 型, tame 版に対する類似の結果も成立する ([ST] Remark 3.11, Theorem 3.12). [ST] では k 上有限型被約連結スキーム S 上の相対曲線 $f: X \rightarrow S$ が non-isotrivial である ($\iff$ 粗分類写像 $h: S \rightarrow M_{g,k}$ の像が 1 点でない) という概念を用いてそのような S に対して定理 1.6 と同様の主張 (c.f. [ST] Theorem 3.9) を示し, その応用として定理 1.6 を証明していた. ((g, n) 型の双曲的な相対曲線の場合も同様である.)

ここまではある種の集合上では, π_1 あるいは π_1^t が “constant でない” という概念を用いて正標数代数閉体上での基本群の構造の “複雑さ” を測ったが, 別のアプローチとして定理 1.4 を一般化した次の問題の定式化も考えられる.

問題 1.7. (g, n) は $2 - 2g - n < 0$ を満たす非負整数とする. このとき,

$$\eta \rightsquigarrow s \in M_{g,[n],\mathbb{F}_p} \text{ が相異なる点} \implies \mathrm{Sp}_{\eta,s}^t \text{ は同型でない} \quad (4)$$

は成立するか?

2 主定理

問題 1.5 に関連して定理 1.6 の主張に現れる S をより “小さくして” π_1 (あるいは π_1^t) の non-constant 性が言えないか? という疑問が生じる. 講演者はこの限定的な状況ではあるが “開円盤版” とも言える定理 2.1 を示した. ここでは正標数代数閉体上の (g, n) 型の曲線 (X, D) が有限体上で定義される曲線の base change で書けるとき constant pair と言う.

定理 2.1. R を正標数完備離散付値環で K をその商体, k をその剰余体で代数閉体になっているとする. M を R 上の smooth スキームとし, $(\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow M$ は (g, n) 型の双曲的な相対曲線とする. さらに $(\mathcal{X}_k, \mathcal{D}_k) \rightarrow M_k$ の粗分類写像 $h: M_k \rightarrow M_{g,[n],k}$ が quasi-finite であるとする. また, “constant pair” に対応する点 $s \in M_k$ を 1 つ固定する. このとき M の s を含む局所閉部分スキーム $\mathcal{V}$ であって, R 上は smooth で s における相対次元が 1 以上のものに対して $V = \mathcal{V} \times_R K$ と定めると, π_1^t は $\underline{D_{M,s}^o(V)}_{\text{gen}, V}$ 上 constant でない.

ただしここで $D_{M,s}^o(V) \subset V^{cl}$ は V の M_K の中で s に関する単位開円盤, $\underline{D_{M,s}^o(V)}_{\text{gen}, V} = \bigcup_{v \in D_{M,s}^o(V)} \mathrm{Spec} \mathcal{O}_{V,v} \subset V$ のことである.

さらに講演者は問題 1.7 に対する 1 つの “証拠” として定理 2.2 を証明した.

定理 2.2. (g, n) は $2 - 2g - n < 0$ を満たすとする. $M_{g,[n],k}$ 上 $v \rightsquigarrow s$ の関係にある 2 点で, s が constant pair に対応する点だとする.

このとき, 以下を満たす $v_i \in M_{g,[n],k}$ ($0 \leq i \leq r$) が存在する.

$$v = v_0 \rightsquigarrow v_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow v_r = s \quad (5)$$

は飽和した鎖 (特に $r = \dim\{v\}$) であり, $\mathrm{Sp}_{v_i, v_{i+1}}^t$ ($0 \leq i \leq r-1$) は全て同型でない.

参考文献

- [ST] Saïdi Mohamed, Akio Tamagawa, *Variation of fundamental groups of curves in positive characteristic*, Journal of Algebraic Geometry **26** (2017), pp. 1–16.
- [T1] Akio Tamagawa, *Fundamental groups and geometry of curves in positive characteristic*, Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math., 70, American Mathematical Society, Providence, RI, pp.297–333.
- [T2] Akio Tamagawa, *On the tame fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic > 0* , Cambridge University Press, Cambridge Mathematical Sciences Research Institute Publications **41** (2003), pp.47–105.
- [T3] Akio Tamagawa, *Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups*, Journal of Algebraic Geometry **13** (2004), pp. 675–724.